موج های مکانیکی

موج: تغییر شکلی که در اثر ارتعاش ذرات یک محیط کشسان ایجاد می گردد، به طوریکه این تغییر شکل با سرعت ثابت در محیط انتشار می یابد را موج گویند.

به طور کلی سه نوع موج داریم: یکی موج مکانیکی که نیاز به محیط مادی دارد. دیگری موج الکترومغناطیسی که علاوه بر محیط مادی در محیط غیر مادی یا خلأ نیز منتشر می شود و دیگری موج مادی است که به ذرات بنیادی مانند الکترون ها، پروتون ها و... وابسته است و پایه ی مکانیک کوانتومی را تشکیل می دهد.

امواج مکانیکی: امواجی که برای انتشار آنها نیاز به محیط مادی می باشد را امواج مکانیکی گویند مانند امواج ایجاد شده در طول طناب یا در سطح آب و یا امواج صوتی و... که این امواج به صورتهای زیر در نظر گرفته می شوند:

① **امواج طولی:** در این امواج راستای ارتعاش و راستای انتشار بر هم منطبق بوده مانند امواج صوتی. از ویژگیهای این امواج، این است که امواج طولی می توانند در هر سه محیط ایجاد و انتشار یابند.

② **امواج عرضی:** در این امواج راستای ارتعاش بر راستای انتشار عمود بوده مانند امواج ایجاد شده در طول طناب و یا در سطح آب. از عرضی امواج عرضی فقط در جامدات و استثنائاً در سطح آزاد مایعات ایجاد و انتشار می یابند و از ویژگیهای این امواج این است که این امواج

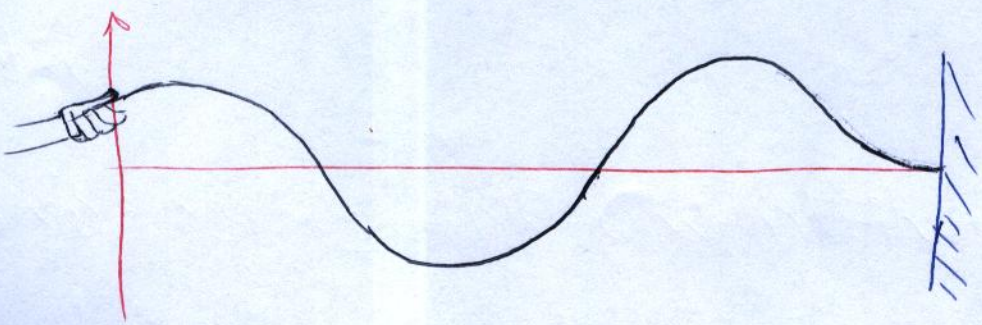
می توانند پالس ریزه یا قطبیده گردند.

③ امواج ایستاده: هرگاه موجی به یک مانعی سخت برخورد نموده و بازتابش نماید از ترکیب موج تابش و بازتابش امواج خاصی ظاهر می گردد که به آنها امواج ایستاده گویند، که از ویژگیهای این امواج این است که در هندسه محیط ایجاد می گردند ولی انتشار نمی یابند.

*) به فنر یا هر چیزی که مانند فنر و وقتی نیروی به آن وارد می شود، آن هم نیروی در جهت مخالف برای بازگشت به حالت اولش وارد می کند، محیط کشسان می گویند.

*) وقتی که مثلاً طنابی را که یک سر آن [redacted] به جایی بسته شده، از طرف دیگر بالا و پایین تکنیم یک [redacted] موجی در طناب ایجاد می شود. یعنی قسمتی از طناب بالا می رود و قسمتی پایین می آید. به این تغییر شکل ایجاد شده در طناب تپ می گویند. (گاج)

*) حال اگر طنابی را به بالا و پایین ببریم و یک حرکت هماهنگ ساده در آن ایجاد کنیم. (مانند شکل زیر) تپ های متوالی و منظمی در طناب ایجاد می شود. نهایتاً به موجی که در طناب ایجاد شده، موج سینوسی می گویند. (گاج)



رابطه سرعت انتشار امواج عرضی:

سرعت انتشار موج بستگی به جنس محیط و شرایط فیزیکی محیط (مانند دما و چگالی) دارد. یعنی اگر این عوامل تغییر نمایند سرعت انتشار موج تغییر می‌کند. از طرفی سرعت انتشار موج بستگی به ویژگی‌های منبع داشته (دوره T، بسامد f، یا انرژی E) و رابطه‌ی سرعت انتشار موج در یک محیط به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V = \frac{x}{t}$$ ← سرعت انتشار موج — جابجایی موج

از طرفی رابطه‌ی سرعت انتشار موج عرضی در طول اجسام مفتولی شکل مانند طناب یا تار به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$V = \sqrt{\frac{F\,(N)}{\mu\,(\frac{kg}{m})}}$$

و $\mu = \frac{m\,(kg)}{l\,(m)}$ جرم واحد طول طناب است. بنابراین:

$$V = \sqrt{\frac{F.l}{m}}$$

و همچنین:

$$V = \sqrt{\frac{F.l}{\rho.V}} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{F.l}{\rho.\frac{\pi D^2}{4}l}} \Rightarrow V = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi.\rho\,(\frac{kg}{m^2})}}$$

(چگالی — حجم)

که بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \times \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \times \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

(سرعت انتشار موج در تار — نیروی کشش تار — طول تار — جرم تار)

(یا)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{D_1}{D_2} \times \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \times \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

(قطر تار — چگالی ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی تار)

④

مثال: تاری به طول $2(m)$ و جرم $64(gr)$ به وسیله‌ی نیروی $500(N)$ کشیده می‌شود. سرعت انتشار امواج عرضی در طول این تار چند $(\frac{m}{s})$ است؟

براساس رابطه داریم:

$$V=\sqrt{\frac{F.L}{m}} \quad , \quad L=2(m) \quad , \quad m=64\times10^{-3}(kg) \quad , \quad F=500(N)$$

$$\Rightarrow V=\sqrt{\frac{500\times2}{64\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{1000}{64\times10^{-3}}}=\frac{1000}{8}=125$$

مثال: دو تار A و B موجود است به طوری که نیروی کشش تار A دو برابر نیروی کشش تار B و طول تار B دو برابر طول تار A می‌باشد. اگر جرم دو تار با هم برابر باشد چه رابطه‌ای بین سرعت انتشار امواج در طول تار برقرار است؟

$$\frac{V_A}{V_B}=\sqrt{\frac{F_A}{F_B}}\times\sqrt{\frac{L_A}{L_B}}\times\sqrt{\frac{m_B}{m_A}}$$

$$=\sqrt{\frac{2F_B}{F_B}}\times\sqrt{\frac{L_A}{2L_A}}\times\sqrt{\frac{m_A}{m_A}}=1 \Rightarrow V_A=V_B$$

مثال: تار مرتعشی به قطر $4mm$ و چگالی $2.5(\frac{gr}{cm^3})$ که با نیروی $7.5\,N$ کشیده شده است. سرعت انتشار امواج عرضی در این تار چند متر بر ثانیه می‌باشد؟

$$V=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi.\rho}}$$

$$V=\frac{2}{4\times10^{-3}}\sqrt{\frac{7.5}{3\times2.5\times10^{3}}}=\frac{1}{2}\times10^{3}\sqrt{\frac{1}{1000}}=\frac{1}{2}\times10^{3}\times\frac{1}{10\sqrt{10}}=\frac{100}{2\sqrt{10}}=5\sqrt{10}$$

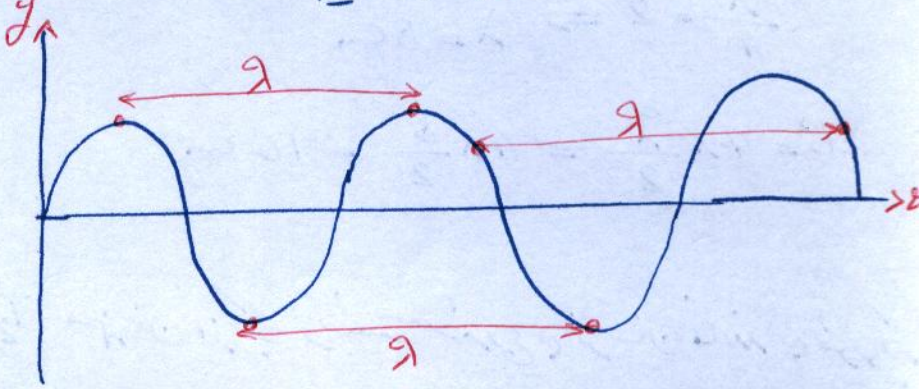
$$V=5\sqrt{10}$$

طول موج:

طول یک موج کامل و یا به عبارت دیگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی هم فاز متوالی (مشابه) را طول موج گویند. یا به عبارت دیگر جابجایی موج در طول یک دوره را طول موج گویند. رابطه‌ی طول موج با دوره و یا بسامد به صورتهای زیر است:

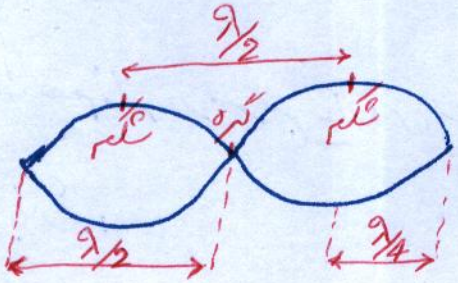
$$\lambda = V \cdot T \quad \left(\frac{m}{s}\right) \quad (m) \quad (s)$$

$$\lambda = \frac{V}{\nu} \quad (Hz)$$



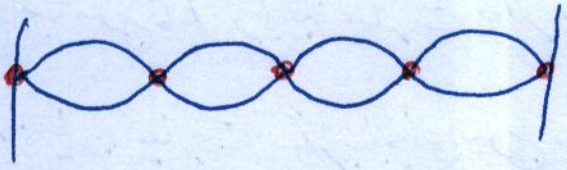
از ویژگیهای رابطه‌ی طول موج این است که ویژگیهای محیط (V) و ویژگیهای منبع (ν و T) را به هم ربط می دهد.

* در امواج ایستاده نقاطی با دامنه‌ی ارتعاش ماکسیمم وجود داشته که به این نقاط شکم گویند و همچنین نقاطی با دامنه‌ی ارتعاش صفر وجود داشته که به این نقاط گره گویند به طوریکه فاصله‌ی هر دو گره‌ی متوالی یا هر دو شکم متوالی برابر با $\frac{\lambda}{2}$ و فاصله‌ی هر گره از هر شکم بعدی برابر با $\frac{\lambda}{4}$ می باشد.



مثال: در تاری که دو انتهای آن به دو نقطه ثابت بسته می باشد 5 گره ایجاد می گردد. اگر فاصله‌ی هر گره از هر شکم بعدی 2cm باشد، طول تار چند cm می باشد؟

پاسخ: از آنجایی که سوال گفته 5 گره داریم و دو طرف آن گره است بنابراین اسولج تار به شکل زیر است:



نقاط بیرنگ گره ها هستند بنابراین 4 تا $\frac{\lambda}{2}$ داریم.

از طرفی سوال مقدار $\frac{\lambda}{4}$ را داده و 2cm می باشد. بنابراین:

$$\frac{\lambda}{4} = 2 \Rightarrow \lambda = 8\,cm$$

$$L = 4 \times \frac{\lambda}{2} = 4 \times \frac{8}{2} = 16\,cm$$

*) هرگاه دو آونگ ساده با دوره ی T_1 و T_2 هم زمان از یک وضعیت شروع به نوسان نمایند به طوریکه بعد از t ثانیه یکی از دو آونگ N نوسان کامل بیشتر از آونگ دوم انجام دهد، خواهیم داشت:

$$t = N \frac{T_1 \cdot T_2}{|T_1 - T_2|}$$

مثال: دو آونگ ساده با $T_A = 1.8(s)$ و $T_B = 2(s)$ هم زمان از یک وضعیت شروع به نوسان می نمایند. پس از چند ثانیه آونگ اول 5 نوسان کامل از آونگ دوم بیشتر نوسان می نماید؟

$$t = N \frac{T_1 \cdot T_2}{|T_1 - T_2|} = N \frac{T_A \cdot T_B}{|T_A - T_B|} = 5 \times \frac{2 \times 1.8}{|2 - 1.8|} = 90$$

*) فاصله نقاط هم فاز در امواج ساده ی سینوسی از یکدیگر مضرب صحیحی از λ و یا مضرب زوجی از $\frac{\lambda}{2}$ می باشد:

$$x = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}$$

و همچنین فاصله ی دو نقطه در فاز متقابل مضرب فردی از $\frac{\lambda}{2}$ می باشد.

$$x = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$$

(7)

در صورتی که بین دو نقطه در فاز متقابل n نقطه‌ی هم فاز با یکی از این دو نقطه وجود داشته باشد، فاصله‌ی دو نقطه با استفاده از رابطه‌ی زیر مشخص می‌گردد:

$$x = n\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

مثال: معادله‌ی ارتعاشی چشمه موجی در SI به صورت $y = 0.01\sin 100\pi t$ است. اگر در راستای انتشار موج، فاصله‌ی سومین نقطه‌ای که با چشمه‌ی موج هم فاز است تا چشمه برابر با 60cm باشد، سرعت انتشار این موج چند متر بر ثانیه است؟ (آزمایشی سنجش - خارج)

پاسخ: براساس روابط گفته شده، چون در صورت مسئله گفته سومین نقطه‌ی هم فاز، بنابراین:

$$\Delta x = n\lambda = 3\lambda = 60\,cm \Rightarrow \lambda = 20\,cm = 0.2\,m$$

$$\omega = 100\pi \Rightarrow 2\pi f = 100\pi \Rightarrow f = 50\,Hz$$

$$\lambda = \frac{V}{f} \Rightarrow V = \lambda \cdot f = 0.2 \times 50 = 10\ m/s$$

تابع موج:

اگر معادله‌ی منبع مولد موج (مبدأ) به صورت $y_0 = A\sin(\omega t + \theta_0)$ باشد، معادله‌ی نقطه غیر مشخصی که به فاصله‌ی x از منبع مولد موج قرار دارد را به صورت‌های زیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$y_M = A\sin\left(\omega t + \theta_0 - \frac{\omega x}{v}\right)$$

$$y_M = A\sin\left(\omega t + \theta_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y_M = A\sin(\omega t + \theta_0 - kx)$$

اختلاف فاز نقطه O و M

که در رابطه‌ی سوم به k عدد موج گوییم و از روابط اخیر فازی توان نتیجه گرفت:

$$K = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

و همچنین مدت زمان لازم برای آنکه امواج نقطه‌ی O به نقطه M برسد، با استفاده از رابطه‌ی زیر مشخص می‌گردد:

$$t_M = \frac{x}{v}$$

*) در واقع همان حرکت نوسانی هماهنگ ساده است.

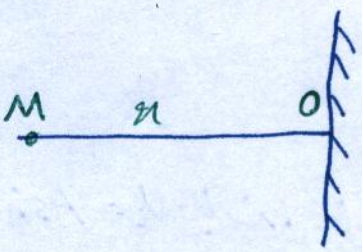
*) اگر معادله‌ی نقطه‌ی M به صورت $u_M = A\sin(\omega t + \theta_0)$ باشد معادله‌ی نقطه‌ی O به صورتهای زیر نتیجه می‌شود:

$$u_O = A\sin(\omega t + \theta_0 + \frac{\omega x}{v})$$

$$u_O = A\sin(\omega t + \theta_0 + \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$u_O = A\sin(\omega t + \theta_0 + kx)$$

*) هرگاه معادله‌ی موج تابش در نقطه‌ی M به صورت $u_M = A\sin(\omega t + \theta_0)$ باشد، معادله‌ی موج بازتابش در نقطه‌ی M به صورت زیر نتیجه می‌شود:



تابش $u(O) = A\sin(\omega t + \theta_0 - \frac{\omega x}{v})$

بازتابش $u(O) = A\sin(\omega t + \theta_0 - \frac{\omega x}{v} + \pi)$

بازتابش $u(M) = A\sin(\omega t + \theta_0 - \frac{\omega x}{v} + \pi - \frac{\omega x}{v})$

نکته: این اختلاف فاز π بخاطر بازتابش از سطح سخت است.

مثال: چشمه موجی با بسامد 10 Hz، در یک محیط که سرعت انتشار موج در آن $100\ (\frac{m}{s})$ است، نوسان‌هایی طولی ایجاد می‌کند که در خلاف جهت محور y منتشر می‌شوند. اگر دامنه‌ی نوسان‌ها 4cm و فاز اولیه‌ی چشمه صفر باشد، تابع این موج بر حسب یکاهای SI را بدست آورید؟ (تالیفی از گاج)

پاسخ: موج طولی است و راستای انتشار آن y می‌باشد بنابراین

فرم کلی: $u_y = A\sin(\omega t + \varphi_0 + ky)$

$A = 4cm = 0.04\,m \quad , \quad \varphi = 0$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 20\pi \quad , \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{20\pi}{100} = \frac{\pi}{5}\ rad/m$

$u_y = 0.04\sin(20\pi t + \frac{\pi}{5}y)$

رابطه اختلاف فاز با اختلاف فاصله:

بین دو نقطه‌ی A و B که به فاصله‌ی x از یکدیگر قرار دارند، رابطه‌ی اختلاف فاز بین آن دو نقطه با فاصله‌ی بین آن دو نقطه به صورت‌های زیر نتیجه می‌شود:

اختلاف فاز فقط به فاصله بستگی دارد. $\Delta\varphi = \frac{\omega \cdot \Delta x}{v}$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda}$

رابطه‌ی اختلاف فاز با اختلاف زمان:

اختلاف فاز یک نقطه در حال نوسان در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 با استفاده از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$

*) اختلاف فاز بین هر دو نقطه‌ی هم فاز مضرب زوجی از π است:

$\Delta\varphi = 2n\pi$

و اختلاف فاز بین دو نقطه در فاز متقابل مضرب فردی از π می‌باشد:

$\Delta\varphi = (2n-1)\pi$

مثال: موجی فاصله بین دو نقطه از محیط انتشار را در مدت $\frac{1}{5}$ دوره طی می‌کند. اختلاف فاز بین این دو نقطه چند رادیان است؟

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

مثال: موجی در یک محیط یک بعدی با سرعت 1.2 متر بر ثانیه در حرکت است. اختلاف فاز دو نقطه از محیط که به فاصله‌ی 2(m) از یکدیگر نیز، در لحظه‌ی $t_1 = 1(s)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. طول موج این امواج چند متر است؟

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\,\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi \times 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 12$$

مثالهای حل شده:

① چگالی (جرم حجمی) یک تار مرتعش ρ است. سرعت انتشار امواج عرضی در طول این تار را برحسب ρ بدست آورید. (نیروی کشش F و سطح مقطع تار A است)

پاسخ: تار را به شکل استوانه در نظر می‌گیریم:

$$\text{حجم تار} = \text{سطح مقطع} \times \text{طول} \Rightarrow V = AL$$

$$\text{جرم } m = \rho V = \rho AL$$

$$\text{جرم واحد طول } \mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho AL}{L} = \rho A$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

② موج‌های صوتی A و B به ترتیب با بسامدهای 600 هرتز و 800 هرتز در یک محیط منتشر می‌شوند. نسبت سرعت انتشار صوت A به سرعت صوت B و همچنین نسبت طول موج صوت A به طول موج صوت B به ترتیب بدست آورید؟

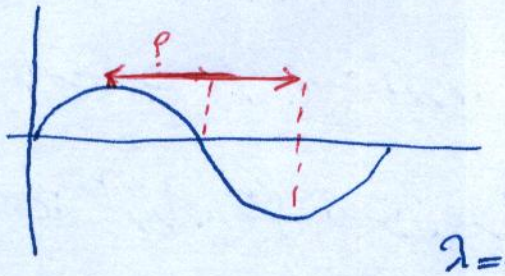
پاسخ: محیط A و B یکسان است و از آنجایی که سرعت انتشار صوت به ویژگی‌های محیط بستگی دارد، بنابراین سرعت انتشار آن‌ها یکی است.

$$V_A = V_B$$

و بنا به رابطه $\lambda = \frac{V}{\nu}$، طول موج آن‌ها عبارت است از:

$$\lambda = \frac{V}{\nu} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{800}{600} = \frac{4}{3}$$

(12) ③ امواج عرضی کم دامنه بر سطح آب با سرعت $0.5\frac{m}{s}$ منتشر می‌شود. اگر بسامد منبع نوسان 5 هرتز باشد، فاصله‌ی یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش در راستای انتشار موج چند سانتی متر است؟



پاسخ: فاصله‌ی فرورفتگی از برآمدگی برابر است با: $\frac{\lambda}{2}$

$$\lambda=\frac{V}{f}=\frac{0.5}{5}=0.1\,m=10\,cm$$

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2}=5\,cm$$

④ یک منبع موجی، امواجی با دوره‌ی $\frac{1}{100}s$ در محیط همگنی می فرستد. اگر فاصله‌ی بین دو قله‌ی متوالی موج 2cm باشد، این موج در مدت چند ثانیه مسافتی به اندازه‌ی 2 متر را می پیماید؟ (تألیفی گاج)

پاسخ: چون گفته فاصله‌ی بین دو قله‌ی متوالی یعنی مقدار طول موج را به ما داده است:

$$\lambda=2\,cm \quad , \quad T=\frac{1}{100}s$$

$$\lambda=VT \Rightarrow V=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\times10^{-2}}{\frac{1}{100}}=2\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta x=V\Delta t \Rightarrow 2=2\times\Delta t \Rightarrow \Delta t=1s$$

⑤ یک منبع ارتعاشی، موج‌هایی با طول موج 4cm را در محیط منتشر می‌کند. اگر سرعت انتشار موج در محیط $2\frac{cm}{s}$ باشد، چند ثانیه پس از لحظه‌ی شروع نوسان، موج به پنجمین نقطه‌ی واقع در فاز مخالف منبع می رسد؟

با توجه به روابط نقاط هم فاز و نقاط در فاز مخالف داریم:

فاصله‌ی نقاط در فاز مخالف $(2n-1)\frac{\lambda}{2}$

زمان رسیدن دو نقطه در فاز مخالف $(2n-1)\frac{T}{2}$, $\lambda=4\,cm$, $V=2\,cm/s$

$$T=\frac{\lambda}{V}=\frac{4}{2}=2s$$

$$\Delta t=(2n-1)\frac{T}{2}=(2\times5-1)\frac{2}{2}=9s$$

(6) معادله‌ی نوسانی نقطه‌ی O در SI به صورت $u_0 = 3\times10^{-2}\sin 200\pi t$ و معادله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه (13) A به فاصله‌ی x از آن به صورت $u_A = 3\times10^{-2}\sin 2\pi(100t - \frac{x}{0.1})$ می‌باشد. سرعت انتشار امواج در محیط چند متر بر ثانیه است؟

با توجه به رابطه‌ی u_A داریم:

$$u_A = 3\times10^{-2}\sin(200\pi t - 20\pi x)$$

k

$$k = 20\pi \ rad/m \qquad \omega = 200\pi \ rad/s$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow 20\pi = \frac{200\pi}{v} \Rightarrow v = 10 \ m/s$$

(7) تابع موجی که در یک بعد منتشر می‌شود در SI به صورت $u_y = 0.02\sin(\pi t - 2x)$ می‌باشد. نسبت بیشینه‌ی سرعت ارتعاش ذرات محیط انتشار به سرعت موج چقدر است؟

پاسخ: با توجه به روابطی دانیم که بیشینه سرعت انتشار برابر $A\omega$ است.

$$v_{max} = A\omega$$

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{v_{max}}{v} = \frac{A\omega}{\omega/k} = Ak = 0.02\times2 = 0.04$$

(8) در یک محیط انتشار موج، حداقل فاصله‌ی بین دو نقطه که با هم $\frac{\pi}{5}$ اختلاف فاز دارند برابر با 40cm است. طول موج ارتعاشات چند سانتی‌متر است؟

$$\Delta\varphi = k\Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{4} = k\times\frac{4}{100} \Rightarrow k = 5\pi \ rad/m$$

$$k = 2\pi/\lambda \Rightarrow 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 40cm$$

(9) معادله‌ی نوسان نقطه‌های A و B از یک محیط انتشار موج در SI به صورت $u_A = 0.02\sin 2\pi(10t - 0.6)$ و $u_B = 0.02\sin 2\pi(10t - 0.2)$ است. کمترین فاصله‌ی ممکن این دو نقطه چند برابر طول موج است؟

(14)

پاسخ: با توجه به فازهای u_A و u_B داریم:

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = (2\pi t - 0.4\pi) - (20\pi t - 1.2\pi) = 0.8\pi = \frac{4\pi}{5}\ rad$$

$$\Delta\varphi = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k} \Rightarrow \Delta x = \frac{4\pi/5}{2\pi/\lambda} = \frac{2}{5}\lambda$$

(10) منبع تولید موجی با معادله‌ی $y = 0.04\sin 10\pi t$ نوسان می‌کند و موج حاصل با سرعت $2\frac{m}{s}$ در محیط منتشر می‌شود. نقطه‌ای از محیط که در فاصله‌ی ۱۰ سانتی‌متری از منبع قرار دارد، در لحظه‌ی $t = \frac{1}{20}s$ در چند سانتی‌متری از وضع تعادل خود قرار دارد؟

پاسخ: با توجه به تابع موج کلی داریم:

$$u_y = A\sin(\omega t - kx)$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{2} = 5\pi\ \frac{rad}{m} \Rightarrow u_y = 0.04\sin(10\pi t - 5\pi x)$$

حال معادله‌ی نقطه‌ای که در $10cm$ از منبع قرار دارد را به دست می‌آوریم:

$$x = 0.1\ m \Rightarrow u_M = 0.04\sin(10\pi t - 5\pi \times 0.1) = 0.04\sin(10\pi t - \frac{\pi}{2})$$

حال بعد نوسانگر در $t = \frac{1}{20}s$ را به دست می‌آوریم:

$$u_M = 0.04\sin(10\pi \times \frac{1}{20} - \frac{\pi}{2}) = 0$$

(11) یک منبع ارتعاشی به معادله‌ی $y = 6\sin\omega t$ برحسب سانتی‌متر، امواجی را در جهت محور xها منتشر می‌کند. در یک لحظه‌ی معین مکان ذره‌ای که در 15 سانتی‌متری مبدأ (چشمه موج) است $3\sqrt{3}\ cm$ و مکان ذره‌ای که در $30cm$ مبدأ است $3\ cm$ و جهت حرکت هر دو ذره یکسان است. حداکثر طول موج این حرکت چند متر است؟

$$\begin{cases} y_1 = 6\sin(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}) \\ y_2 = 6\sin(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda}) \end{cases} \Rightarrow$$

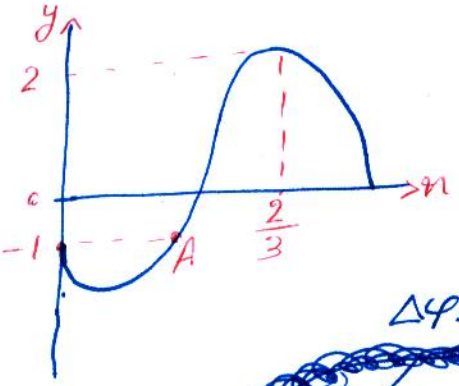
(15)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3} = 6\sin\left(\omega t - \frac{2\pi \times 15}{\lambda}\right) \\ 3 = 6\sin\left(\omega t - \frac{2\pi \times 30}{\lambda}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\omega t - \frac{30\pi}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega t - \frac{30\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(\omega t - \frac{60\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega t - \frac{60\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6} \end{cases} \longrightarrow \text{از هم کم می‌کنیم}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{\lambda}(60-30) \Rightarrow \lambda = 1.8\ m$$

(12) نقش موجی در لحظه‌ی $t=0$ مطابق شکل است. اگر سرعت انتشار موج $10\ \frac{m}{s}$ باشد، در لحظه‌ی $t=\frac{1}{60}s$ مکان نوسانگر A چند سانتی‌متر است؟



چون با توجه به شکل می‌توانیم دریابیم که نوسانگر در ناحیه‌ی سوم است و فاز آن را از روی نقطه A و دامنه می‌توانیم پیدا کنیم.

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$\Delta\varphi$ به دست آمده برای رسیدن به نقطه‌ی A است.

$$\sin\varphi_0 = \frac{x}{A} = \frac{-1}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\Delta x = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 1\ m$$

$$\lambda = VT \Rightarrow 1 = 10T \Rightarrow T = \frac{1}{10}s$$

بنابراین از روی دوره تناوب می‌توانیم دریابیم که زمان $t=\frac{1}{60}s$ در واقع $\frac{T}{6}$ است.

حال $\Delta\varphi$ را در زمان $t=\frac{1}{60}s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}$$

با طی کردن $\frac{\pi}{3}$ زاویه، مکان نوسانگر به $-A$ می‌رسد، بنابراین مکان آن $-2cm$ است.



(13) نیروی کشش سیمی 0.2N و جرم هر متر از آن 4.8×10^{-4} کیلوگرم است. اگر در این سیم امواجی با طول موج 2 متر و دامنه‌ی 10 سانتی متر تولید کنیم، بیشینه‌ی شتاب ارتعاش ذرات این ریسمان چند متر بر مجذور ثانیه است؟ ($\pi^2=10$) (تالیفی از کاج)

$$V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{1.2}{4.8\times10^{-4}}}=\sqrt{\frac{1}{4\times10^{-4}}}=\frac{1}{2\times10^{-2}}=50\ m/s$$

$$\lambda=\frac{V}{\nu}\Rightarrow 2=\frac{50}{\nu}\Rightarrow \nu=25Hz$$

$$a_{max}=A\omega^2=A(2\pi\nu)^2=0.1\times(2\pi\times25)^2=2500\ m/s^2$$

(14) یک منبع موج امواجی با بسامد 10 هرتز ایجاد می‌کند که با سرعت 0.5 متر بر ثانیه در یک محیط منتشر می‌شوند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ای که با منبع موج در فاز متقابل است از منبع موج چند سانتی متر است؟

پاسخ: با توجه به رابطه‌ی نقاط در فاز متقابل داریم: $\Delta x=(2m-1)\frac{\lambda}{2}$

و همچنین چون گفته نزدیک‌ترین نقاط پس m را برابر 1 می‌گیریم:

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda=\frac{V}{\nu}=\frac{0.5}{10}\Rightarrow\lambda=0.05\ m=5\ cm$$

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2}=\frac{5}{2}=2.5\ cm$$

$$\lambda=\frac{V}{\nu}\Rightarrow 0.2=\frac{V}{200}\Rightarrow V=40\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\Delta x=Vt\Rightarrow 20=40t\Rightarrow t=0.5\ (s)$$

(15) اگر بر سطح آب امواج طبیعی‌ای شکل به طول موج 0.1m و بسامد 2 هرتز تولید شود، سرعت انتشار این امواج در سطح آب چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

(16)

(17) $\lambda = 0.1\ m \ , \ \nu = 2HZ$

$$\lambda = \frac{V}{\nu} \Rightarrow V = \lambda\nu = 0.1 \times 2 = 0.2 \left(\frac{m}{s}\right)$$

(16) معادله‌ی ارتعاشی نقاط M و N از یک محیط قابل ارتعاش که از یک منبع موج دریافت می‌کنند، در SI به ترتیب $y_M = r\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و $y_N = r\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ است. اگر طول موج 80 cm باشد، کم‌ترین فاصله‌ی M از N چند سانتی‌متر است؟

اول باید اختلاف فاز بین دو نقطه‌ی M و N را بدست بیاوریم و از روی اختلاف فاز، اختلاف مسیر را پیدا کنیم:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \frac{\pi}{2}) - (\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}\ rad$$

$$\Delta\varphi = k\Delta x \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{80}\Delta x \Rightarrow \underline{\Delta x = 10\ cm}$$

(17) موجی در یک محیط منتشر می‌شود. فاز یک ذره از محیط انتشار این موج، در مدت 0.4s به اندازه‌ی 3π رادیان تغییر می‌کند. اگر اختلاف فاز دو نقطه از محیط انتشار این موج که به فاصله‌ی 40cm از هم واقع‌اند برابر $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد، سرعت انتشار این موج در این محیط چند متر بر مجذور ثانیه است؟

پاسخ:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{3\pi}{0.4} = \frac{15\pi}{2}\ rad/s$$

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{\omega}{V}\Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi/2}{V} \times 0.4 \Rightarrow V = 6\left(\frac{m}{s}\right)$$

(18) یک منبع موج، امواجی را با بسامد 5 هرتز و طول‌موج 4 سانتی‌متر در یک ریسمان منتشر می‌کند. این موج پس از $\frac{1}{30}$ ثانیه به نقطه M در فاصله‌ی x از مبدأ می‌رسد. اگر فاز اولیه‌ی منبع صفر باشد، سرعت متوسط ذره‌ی M در ثانیه‌ی اول چند متر بر مجذور ثانیه است؟

(تالیفی از گاج)

(18) معادله‌ی ارتعاشی منبع $y_0 = A\sin\omega t = 0.04\sin(10\pi t)$

معادله‌ی ارتعاشی نقطه‌ی M $y_M = A\sin(\omega t - \Delta\varphi)$ ، $\Delta\varphi = \omega\Delta t = 10\pi \times \frac{1}{30} = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow y_M = 0.04\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0.04\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -0.04\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ t = 1 \Rightarrow y_2 = 0.04\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -0.04\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\bar{V} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = 0$$

(19) تابع موجی که در جهت محور x منتشر می‌شود، در SI به صورت $u = A\sin(5\pi t - \frac{\pi}{4}x)$ است. اگر بسامد ارتعاشات منبع را دو برابر کنیم، تابع موج در حالت جدید کدام است؟

پاسخ:

اگر بسامد دو برابر شود، سرعت زاویه‌ای و طول موج دو برابر خواهد شد.

$$\omega = 2\pi f \ , \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}$$

$$\omega_2 = 2\omega_1 = 10\pi \ rad/s \ , \quad k_2 = 2k_1 = \frac{\pi}{2} \ rad/m \ , \quad u = A\sin(10\pi t - \frac{\pi}{2}x)$$

(20) اگر در یک محیط انتشار، معادله‌ی ارتعاشی نقطه‌ای به فاصله‌ی d از منبع ارتعاشی در SI به صورت $y = 0.04\sin(\omega t - \frac{12\pi d}{v})$ باشد، دوره‌ی تناوب آن منبع چند ثانیه است؟

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{\omega}{v}\Delta x$$

$$\frac{12\pi d}{v} = \frac{\omega}{v}d \Rightarrow 2\pi = \omega \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 12\pi \Rightarrow T = \frac{1}{6}$$